

Zápočtová písemka ke kurzu *Logický proseminář*

(15. května 2008)

1. Najděte formuli v jazyce jen s binárním predikátovým symbolem $P(x, y)$, která je splnitelná

- (a) pouze v (i konečných) modelech s alespoň dvěma prvky,
- (b) pouze v nekonečných modelech.

(5 bodů)

2. Rozhodněte a stručně zdůvodněte, zda pro libovolnou množinu formulí Γ a libovolné formule φ, ψ platí

- (a) $\Gamma \models \varphi$ nebo $\Gamma \models \neg\varphi$,
- (b) $\Gamma \vdash \varphi$ nebo $\Gamma \vdash \neg\varphi$,
- (c) $\Gamma \models \varphi \vee \psi$, právě tehdy když $\Gamma \models \varphi$ nebo $\Gamma \models \psi$,
- (d) $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$, právě tehdy když $\Gamma \vdash \varphi$ nebo $\Gamma \vdash \psi$.

(10 bodů)

3. Převedte formuli $\exists xP(x) \rightarrow \exists y(P(x) \wedge \forall x(R(y, x) \rightarrow \neg P(x)))$ do prenexního tvaru.

(5 bodů)

4. Dokažte následující formule v HK, GK či ND s tím, že v každém z kalkulů dokážete alespoň jednu formuli:

- (a) $\exists x\exists y\varphi(x, y) \rightarrow \exists y\exists x\varphi(x, y)$,
- (b) $\forall x(\varphi(x)) \rightarrow \forall x(\varphi(x) \vee \psi(x))$,
- (c) $\exists x(\varphi(x) \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\forall x\varphi(x) \rightarrow \psi)$, pokud $x \notin FV(\psi)$,
- (d) $(\exists x\varphi(x) \rightarrow \forall x\psi(x)) \rightarrow \forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$.

(10 bodů)

5. Rozhodněte, zda jsou následující formule logicky platné:

- (a) $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x))$,
- (b) $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\exists xP(x) \vee \exists xQ(x))$,
- (c) $\exists x\forall yR(x, y) \rightarrow \forall y\exists xR(x, y)$,
- (d) $\forall y\exists xR(x, y) \rightarrow \exists x\forall yR(x, y)$,
- (e) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x))$,
- (f) $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x))$,
- (g) $(\forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x)) \rightarrow \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$,
- (h) $(\exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)) \rightarrow \exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$,
- (i) $\forall y(\exists xP(x) \rightarrow P(y))$,
- (j) $\exists x\forall y(P(x) \rightarrow P(y))$.

(10 bodů)

6. Dokažte, že pro libovolnou formuli φ , term t a proměnnou x , která není mezi volnými proměnnými formule φ , platí

$$\varphi_x(t) = \varphi.$$

(10 bodů)