Úlohy ke kurzu *Logický proseminář*, část I

(21. února 2008)

I.1 Uvažujte ve výrokové logice ternární logickou spojku **if** p **then** q **else** r. Odhadněte její přirozený význam a definujte ji tabulkou či pomocí ostatních spojek. V jazyce pouze s touto spojkou a konstantami $\perp$ a $\top$ naopak ukažte, že lze jednoduše definovat spojky negace, disjunkce, konjukce a implikace.

(2 body)

I.2 Dokažte či vyvraťte následující tvrzení: Nahradíme-li ve formuli term libovolným termem, dostáváme opět formuli.

(2 body)

I.3 Uvažujte strukturu $\mathbb{M}$ pro jazyk s rovností, binárním predikátem $\leq$ a unární funkcí f, jejíž univerzum se sestává ze tří prvků a, b a c. Funkce f je realizována množ. funkcí $f^{\mathbb{M}}(a) = b$, $f^{\mathbb{M}}(b) = c$ a $f^{\mathbb{M}}(c) = c$ a predikát $\leq$ je realizován množ. relací dvojic $\{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, c\rangle\}$. Zdůvodněte, zda v $\mathbb{M}$ platí následující formule:

(a) $\forall x(f(x) \neq x)$,

(b) $\forall x(x \leq f(x))$,

(c) $\forall x \exists y(x \leq y)$,

(d) $\forall x \exists y(x \leq y \wedge x \neq y)$.

(2 body)

I.4 Rozhodněte, které z následujících formulí jsou logicky pravdivé, a u těch, které nejsou, najděte interpretaci, při které neplatí:

(a) $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x))$,

(b) $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$,

(c) $(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \rightarrow \forall x(P(x) \wedge Q(x))$,

(d) $(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x))$,

(e) $\exists x \forall y R(x, y) \rightarrow \forall y \exists x R(x, y)$,

(f) $\forall y \exists x R(x, y) \rightarrow \exists x \forall y R(x, y)$,

(g) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x))$,

(h) $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x))$,

(i) $(\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)) \rightarrow \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$,

(j) $(\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)) \rightarrow \exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$,

(k) $\forall y(\exists x P(x) \rightarrow P(y))$,

(l) $\exists x \forall y(P(x) \rightarrow P(y))$.

(4 body)