

Úlohy ke kurzu *Logický proseminář*, část II

(6. března 2008)

II.1 Rozhodněte, zda jsou následující množiny formulí splnitelné. Své rozhodnutí zdůvodněte.

- (a) $\exists x \exists y \varphi(x, y)$
 $\forall x \forall y \exists z (\varphi(x, z) \wedge \varphi(z, y))$
- (b) $\forall x \exists y \varphi(y, x)$
 $\forall x \forall y (\varphi(x, y) \rightarrow \neg \varphi(y, x))$
 $\forall x \forall y \forall z (\varphi(x, y) \wedge \varphi(y, z) \rightarrow \varphi(x, z))$
- (c) Všichni jednorožci jsou zvířata.
Žádný jednorožec není zvíře.

(2 body)

II.2 Dokažte či vyvráťte následující tvrzení.

- (a) Libovolná logicky platná formule predikátové logiky je instancí tautologie výrokové logiky.
- (b) Libovolná logicky platná otevřená formule predikátové logiky je instancí tautologie výrokové logiky.

(3 body)

II.3 Rozhodněte, zda existují množina formulí Γ a formule φ takové, že platí $\Gamma \models \varphi$ a $\Gamma \models \neg \varphi$. Své tvrzení zdůvodněte.

(2 body)

II.4 Nechtě φ a ψ jsou formule v jazyce \mathcal{L} a nechtě pro každou strukturu \mathbb{D} pro jazyk \mathcal{L} platí $\mathbb{D} \models \varphi \Rightarrow \mathbb{D} \models \psi$. Dokažte, že pak platí také $\models \varphi \Rightarrow \models \psi$. Ukažte, že obrácené tvrzení však neplatí.

(3 body)