

## Úlohy ke kurzu *Logický proseminář*, část VI

(3. dubna 2008)

**VI.1** Najděte splnitelnou sentenci neobsahující rovnost, která není splnitelná v žádné struktuře, jejíž nosič má méně než tři prvky.

(2 body)

**VI.2** Nechť  $\varphi$  je formule v jazyce  $L_2$  a nechť  $L_1 \subseteq L_2$  je seznam všech mimologických symbolů vyskytujících se ve  $\varphi$ . Pak  $\varphi$  platí v každé struktuře pro  $L_1$ , právě když  $\varphi$  platí v každé struktuře pro  $L_2$ . Dokažte.

(3 body)

**VI.3** Dokažte, že formule  $\forall x \exists y (x < y)$  není ekvivalentní s žádnou existenční ani s žádnou univerzální formulí.

*Nápověda:* použijte tvrzení o podstrukturách ukázané na prosemináři.

(3 body)

**VI.4** Rozhodněte, které z následujících formulí jsou axiomy kalkulu *HK* pro predikátovou logiku:

- (a)  $\forall x \exists y R(x, y) \rightarrow (\exists x \forall y R(x, y) \vee \forall x \exists y R(x, y))$ ,
- (b)  $(R(f(x, y), x) \rightarrow R(x, f(x, y))) \rightarrow \exists y (R(y, x) \rightarrow R(x, y))$ ,
- (c)  $\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x)) \rightarrow \forall y (R(f(x, y), y) \rightarrow R(y, f(x, y)))$ ,
- (d)  $(\neg \forall x \neg R(x, y) \rightarrow \neg \exists y R(x, y)) \rightarrow ((\neg \forall x \neg R(x, y) \rightarrow \exists y R(x, y)) \rightarrow \forall x \neg R(x, y))$ ,
- (e)  $\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x)) \rightarrow \forall y (R(f(x, z), y) \rightarrow R(y, f(x, z)))$ ,
- (f)  $\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x)) \rightarrow \forall x (R(x, z) \rightarrow R(z, x))$ ,
- (g)  $\forall y R(x, y) \rightarrow (\neg \forall y R(x, y) \rightarrow R(x, y))$ .

(2 body)