Úlohy ke kurzu *Logický proseminář*, část VII

(10. dubna 2008)

Dokazujte vše v HK (bez použití věty o úplnosti) a používejte pouze věci dokázané na přednášce, semináři či v již vyřešených příkladech! Znalosti z HK pro výrokovou logiku samozřejmě používat můžete.

VII.1 Dokažte, že když x nemá volný výskyt ve formuli φ, pak $\vdash \forall x\varphi \equiv \exists x\varphi$.

(1 bod)

VII.2 Pro libovolnou formuli φ, libovolnou proměnnou x a libovolnou teorii Γ platí $\Gamma \vdash \varphi$, právě tehdy když $\Gamma \vdash \forall x\varphi$. Dokažte.

(2 body)

VII.3 Dokažte:

(a) $\vdash \forall x(\varphi \wedge \psi) \equiv (\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)$,

(b) $\vdash \exists x(\varphi \vee \psi) \equiv (\exists x\varphi \vee \exists x\psi)$,

(c) $\vdash \neg\exists x\varphi \rightarrow \neg\forall x\varphi$,

(d) $\vdash \neg\exists x\varphi \rightarrow \forall x\neg\varphi$,

(e) $\vdash \forall x\varphi \rightarrow \forall x(\varphi \vee \psi)$,

(f) $\vdash \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\neg\psi \rightarrow \forall x\neg\varphi)$,

(g) $\vdash \exists x(\varphi \rightarrow \neg(\psi \vee \chi)) \rightarrow \exists x(\varphi \rightarrow (\neg\psi \wedge \neg\chi))$,

(h) $\vdash \forall x(\varphi \rightarrow \neg\psi) \equiv \neg\exists x(\varphi \wedge \psi)$,

(5 bodů)

VII.4 Mějme teorii Γ, která má jazyk $\{\circ\}$ s jediným binárním predikátem a axiomy

A1: $\forall x\forall y\forall z(x \circ y \wedge y \circ z \rightarrow x \circ z)$,

A2: $\forall x\forall y(x \circ y \vee y \circ x)$.

Dokažte v HK, že platí:

(a) $\Gamma \vdash \forall x(x \circ x)$,

(b) $\Gamma \vdash \forall x\exists y(x \circ y \vee y \circ x)$,

(c) $\Gamma \vdash \forall x\forall y\forall z\forall w(x \circ y \wedge y \circ z \wedge z \circ w \rightarrow x \circ w)$.

(2 body)