

Úlohy ke kurzu *Logický proseminář*, část VIII

(17. dubna 2008)

Dokazujte vše v kalkulu přirozené dedukce ND respektive v gentzenovském kalkulu GK (nepoužívejte větu o úplnosti) a používejte pouze věci dokázané na přednášce, semináři či v již vyřešených příkladech! Znalosti z výrokové logiky samozřejmě používat můžete.

VIII.1 Dokažte v ND i v GK:

- (a) $\forall x\varphi(x) \rightarrow \forall z\varphi(z)$, pokud se z nevyskytuje ve $\varphi(x)$,
- (b) $\forall x\forall y\varphi(x, y) \rightarrow \forall y\forall x\varphi(x, y)$,
- (c) $\forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow \forall x\varphi(x) \wedge \forall x\psi(x)$,
- (d) $\forall x(\varphi \rightarrow \psi(x)) \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \forall x\psi(x))$, pokud $x \notin FV(\varphi)$,
- (e) $\neg\forall x\varphi(x) \leftrightarrow \exists x\neg\varphi(x)$,
- (f) $\neg\exists x\varphi(x) \leftrightarrow \forall x\neg\varphi(x)$,
- (g) $\exists x(\varphi(x) \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\forall x\varphi(x) \rightarrow \psi)$, pokud $x \notin FV(\psi)$,
- (h) $\exists x\exists y\varphi(x, y) \leftrightarrow \exists y\exists x\varphi(x, y)$,
- (i) $\exists x\varphi \leftrightarrow \varphi$, pokud $x \notin FV(\varphi)$,
- (j) $(\exists x\varphi \rightarrow \forall x\psi) \rightarrow \forall x(\varphi \rightarrow \psi)$.

(10 bodů)