Úlohy ke kurzu *Logický proseminář*, část IX

(24. dubna 2008)

IX.1 Nechť Γ je libovolná množina formulí, rozhodněte platnost následujících tvrzení. V případě neplatnosti ekvivalence rozhodněte, zda platí alespoň jedna implikace. Své tvrzení zdůvodněte.

(a) $\psi \vdash \varphi$, právě tehdy když $\forall x \psi \vdash \varphi$,

(b) $\psi \vdash \varphi$, právě tehdy když $\exists x \psi \vdash \varphi$,

(c) $\Gamma, \psi \vdash \varphi$, právě tehdy když $\Gamma \vdash \psi \to \varphi$,

(d) nechť φ je sentence, pak $\Gamma, \psi \vdash \varphi$, právě tehdy když $\Gamma \vdash \psi \to \varphi$,

(e) nechť ψ je sentence, pak $\Gamma, \psi \vdash \varphi$, právě tehdy když $\Gamma \vdash \psi \to \varphi$.

(5 bodů)

IX.2 Dokažte následující sentence v teorii komutativních těles. Tvrzení (g) a (h) o numerálech lze v teorii komutativních těles dokázat pro každou dvojici čísel n a m.

(a) $\forall x \forall y \forall z (y + x = z + x \to y = z)$,

(b) $\forall x \forall y \forall z (x \neq 0 \wedge y \cdot x = z \cdot x \to y = z)$,

(c) $\forall x (x \cdot 0 = 0)$,

(d) $\forall x \forall y (x \cdot y = 0 \to x = 0 \vee y = 0)$,

(e) $\forall x (\forall v (v + x = v) \to x = 0)$,

(f) $\forall x (\forall v (v \cdot x = v) \to x = 1)$,

(g) $\overline{n} + \overline{m} = \overline{n + m}$,

(h) $\overline{n} \cdot \overline{m} = \overline{n \cdot m}$.

Návod: Definici *teorie komutativních těles* najde např. ve Švejdarově knize na str. 176–177, tam také případně najdete další informace a nápovědy, neboť cvičení je vlastně lemma 3.2.14. Uvědomte si, že $\overline{n}$ značíme *numerál*, např. $\overline{3}$ je $(((0 + 1) + 1) + 1)$. Body (g) a (h) nejlépe dokazujte indukcí podle m. *(5 bodů)*