1. Zápočtová písemka ke kurzu *Logický proseminář*

(7. května 2009)

1. Najděte ekvivalentní formuli v prenexní normální formě k formuli

$$\exists x P(x,y) \rightarrow (Q(x) \rightarrow \neg\exists y P(x,y)).$$

(2 body)

2. Dokažte následují formule v hilbertovském kalkulu, v kalkulu přirozené dedukce nebo v gentzenovském kalkulu bez použití věty o úplnosti:

   (a) $\forall x \forall y \varphi(x,y) \rightarrow \forall y \forall x \varphi(x,y)$,
   (b) $\exists x(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\exists x \varphi \vee \exists y \psi)$,
   (c) $\forall x(\varphi \rightarrow \psi(x)) \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \forall x \psi(x))$, pokud $x \notin FV(\varphi)$,
   (d) $(\exists x \varphi(x) \rightarrow \forall x \psi(x)) \rightarrow \forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$.

(4 body)

3. Rozhodněte, zda jsou následující formule logicky platné:

   (a) $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x))$,
   (b) $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$,
   (c) $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x))$,
   (d) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x))$,
   (e) $(\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)) \rightarrow \exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$,
   (f) $\exists y(\forall x P(x) \rightarrow P(y))$,
   (g) $\exists x \exists y P(x,y) \rightarrow \exists z P(z,z)$,
   (h) $\forall x \exists y P(x,y) \rightarrow \exists y P(y,y)$,
   (i) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x))$,
   (j) $\forall x \exists y(P(x) \rightarrow P(y))$.

(5 bodů)

4. Mějme jazyk predikátové logiky s rovností. Napište formuli, která platí právě v modelech s dvojprvkovým nosičem.

(1 body)

5. Definujte rekurzívně množinu volných proměnných formule φ, kterou značíme $FV(\varphi)$.

(2 body)

6. Nechť Γ je libovolná množina formulí, rozhodněte platnost následujících tvrzení. V případě neplatnosti ekvivalence rozhodněte, zda platí alespoň jedna implikace. Své tvrzení zdůvodněte.

   (a) $\psi \vdash \varphi$, právě tehdy když $\forall x \psi \vdash \varphi$,
   (b) $\psi \vdash \varphi$, právě tehdy když $\exists x \psi \vdash \varphi$,
   (c) $\Gamma, \psi \vdash \varphi$, právě tehdy když $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi$.

(3 body)

7. Nechť φ a ψ jsou formule v jazyce $\mathcal{L}$ a nechť pro každou strukturu $\mathbb{D}$ pro jazyk $\mathcal{L}$ platí $\mathbb{D} \models \varphi \Rightarrow \mathbb{D} \models \psi$. Dokažte, že pak platí také $\models \varphi \Rightarrow \models \psi$. Ukažte, že obrácené tvrzení však neplatí.

(3 body)