

## Cvičení ke kurzu *Logický proseminář LS*, část I

(5. března 2009)

- I.1** Dokažte pečlivě, že pro libovolnou formuli  $\varphi$ , libovolné konstanty  $a, b$  a libovolné dvě různé proměnné  $x$  a  $y$  platí

$$(\varphi_x(a))_y(b) = (\varphi_y(b))_x(a).$$

- I.2** Vyvráťte či podrobně dokažte: predikátová formule  $\psi$  je důsledkem formule  $\varphi$ , právě když  $\varphi \rightarrow \psi$  je logicky platná formule.
- I.3** Rozhodněte, zda platí toto tvrzení: je-li  $\varphi$  formule jazyka  $L$  a formule  $\exists y\varphi$  je logicky platná, pak existuje term  $t$  jazyka  $L$  takový, že  $\varphi_y(t)$  je logicky platná.

Návod: uvažujte jazyk  $\{P, F\}$  a formuli  $\exists y(P(F(y)) \vee \neg P(y))$ .

- I.4** Dokažte, že každá z následujících formulí je logicky platná:

- (a)  $\forall x\forall y\varphi \equiv \forall y\forall x\varphi$ ,
- (b)  $\exists x\exists y\varphi \equiv \exists y\exists x\varphi$ ,
- (c)  $\forall x\forall y\varphi \rightarrow \forall x\varphi_y(x)$ ,
- (d)  $\exists x\varphi_y(x) \rightarrow \exists x\exists y\varphi$ ,
- (e)  $\forall x\varphi \wedge \forall x\psi \equiv \forall x(\varphi \wedge \psi)$ ,
- (f)  $\exists x\varphi \vee \exists x\psi \equiv \exists x(\varphi \vee \psi)$ ,
- (g)  $\exists x\forall y\varphi \rightarrow \forall y\exists x\varphi$ ,
- (h)  $\forall x\varphi \rightarrow \exists x\psi \equiv \exists x(\varphi \rightarrow \psi)$ ,
- (i)  $\exists x(\varphi \rightarrow \forall y\varphi_x(y))$ , když  $y$  nemá volný výskyt ve  $\varphi$ ,
- (j)  $\forall x\varphi \rightarrow \exists x\varphi$ .