Cvičení ke kurzu *Logický proseminář LS*, část II

(19. března 2009)

II.1 Dokažte, že nemá-li x volné výskyty ve formuli φ, pak formule $\varphi, \forall x\varphi$ a $\exists x\varphi$ jsou spolu ekvivalentní.

II.2 Nechť φ a χ jsou fomule a nechť x se nevyskytuje volně ve formuli χ. Dokažte, že pak následující formule jsou logicky platné:

(a) $\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$, $\quad\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$,

(b) $\chi \vee \forall x\varphi \equiv \forall x(\chi \vee \varphi)$, $\quad\chi \vee \exists x\varphi \equiv \exists x(\chi \vee \varphi)$,

(c) $\chi \wedge \forall x\varphi \equiv \forall x(\chi \wedge \varphi)$, $\quad\chi \wedge \exists x\varphi \equiv \exists x(\chi \wedge \varphi)$,

(d) $\chi \to \forall x\varphi \equiv \forall x(\chi \to \varphi)$, $\quad\chi \to \exists x\varphi \equiv \exists x(\chi \to \varphi)$,

(e) $\forall x\varphi \to \chi \equiv \exists x(\varphi \to \chi)$, $\quad\exists x\varphi \to \chi \equiv \forall x(\varphi \to \chi)$.

Návod: zadání je Lemma 3.1.22 ze Švejdara, kde také naleznete důkaz jednoho z tvrzení.

II.3 Nechť φ a ψ jsou formule v jazyce $\mathcal{L}$ a nechť pro každou strukturu $\mathbb{D}$ pro jazyk $\mathcal{L}$ platí $\mathbb{D} \models \varphi$, právě když $\mathbb{D} \models \psi$. Musí být formule φ a ψ ekvivalentní?

II.4 Rozhodněte zda platí: každá formule tvaru $(\varphi \equiv \psi) \to (\forall x\varphi \equiv \forall x\psi)$ je logicky platná formule.