Úlohy ke kurzu *Logický proseminář*, část IV

(2. dubna 2009)

IV.1 Rozhodněte, které z následujících formulí jsou axiomy kalkulu HK pro predikátovou logiku:

(a) $\forall x \exists y R(x,y) \to (\exists x \forall y R(x,y) \vee \forall x \exists y R(x,y))$,

(b) $(R(f(x,y),x) \to R(x,f(x,y))) \to \exists y(R(y,x) \to R(x,y))$,

(c) $\forall x \forall y(R(x,y) \to R(y,x)) \to \forall y(R(f(x,y),y) \to R(y,f(x,y)))$,

(d) $(\neg\forall x \neg R(x,y) \to \neg\exists y R(x,y)) \to ((\neg\forall x \neg R(x,y) \to \exists y R(x,y)) \to \forall x \neg R(x,y))$,

(e) $\forall x \forall y(R(x,y) \to R(y,x)) \to \forall y(R(f(x,z),y) \to R(y,f(x,z)))$,

(f) $\forall x \forall y(R(x,y) \to R(y,x)) \to \forall x(R(x,z) \to R(z,x)))$,

(g) $\forall y R(x,y) \to (\neg\forall y R(x,y) \to R(x,y))$.

IV.2 Dokažte, že když x nemá volný výskyt ve formuli φ, pak $\vdash \forall x\varphi \equiv \exists x\varphi$.

IV.3 Dokažte v HK:

(a) $\vdash \forall x(\varphi \wedge \psi) \equiv (\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)$,

(b) $\vdash \exists x(\varphi \vee \psi) \equiv (\exists x\varphi \vee \exists x\psi)$,

(c) $\vdash \neg\exists x\varphi \to \neg\forall x\varphi$,

(d) $\vdash \neg\exists x\varphi \to \forall x\neg\varphi$,

(e) $\vdash \forall x\varphi \to \forall x(\varphi \vee \psi)$,

(f) $\vdash \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\neg\psi \to \forall x\neg\varphi)$,

(g) $\vdash \exists x(\varphi \to \neg(\psi \vee \chi)) \to \exists x(\varphi \to (\neg\psi \wedge \neg\chi))$,

(h) $\vdash \forall x(\varphi \to \neg\psi) \equiv \neg\exists x(\varphi \wedge \psi)$,

IV.4 Mějme teorii Γ, která má jazyk $\{\circ\}$ s jediným binárním predikátem a axiomy

A1: $\forall x \forall y \forall z(x \circ y \wedge y \circ z \to x \circ z)$,

A2: $\forall x \forall y(x \circ y \vee y \circ x)$.

Dokažte v HK, že platí:

(a) $\Gamma \vdash \forall x(x \circ x)$,

(b) $\Gamma \vdash \forall x \exists y(x \circ y \vee y \circ x)$,

(c) $\Gamma \vdash \forall x \forall y \forall z \forall w(x \circ y \wedge y \circ z \wedge z \circ w \to x \circ w)$.