Úlohy ke kurzu *Logický proseminář*, část V

(16. dubna 2009)

V.1 Nechť φ je otevřená formule predikátové logiky dokazatelná v HK. Dokažte, že pak je φ instancí výrokové tautologie a má tedy důkaz využívající pouze axiomy (A1)–(A3) a pravidlo modus ponens.

V.2 Dokažte, že následující formule je platná ve všech strukturách s konečným nosičem, ale není platná v některých strukturách s nekonečným nosičem.

$$\forall x \forall y \forall z (P(x,x) \wedge (P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z)) \wedge (P(x,y) \vee P(y,x))) \to \exists y \forall x P(y,x)$$

V.3 Nechť Γ je libovolná množina formulí, rozhodněte platnost následujících tvrzení. V případě neplatnosti ekvivalence rozhodněte, zda platí alespoň jedna implikace. Své tvrzení zdůvodněte.

(a) $\psi \vdash \varphi$, právě tehdy když $\forall x \psi \vdash \varphi$,

(b) $\psi \vdash \varphi$, právě tehdy když $\exists x \psi \vdash \varphi$,

(c) $\Gamma, \psi \vdash \varphi$, právě tehdy když $\Gamma \vdash \psi \to \varphi$,

(d) nechť φ je sentence, pak $\Gamma, \psi \vdash \varphi$, právě tehdy když $\Gamma \vdash \psi \to \varphi$,

(e) nechť ψ je sentence, pak $\Gamma, \psi \vdash \varphi$, právě tehdy když $\Gamma \vdash \psi \to \varphi$.