Úlohy ke kurzu *Logický proseminář*, část VI

(23. dubna 2009)

VI.1 Pomocí přirozené dedukce dokažte následující formule:

(a) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$,
(b) $\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$,
(c) $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma))$,
(d) $(\varphi \to (\psi \to \sigma)) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \to \sigma)$,
(e) $\bot \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$.

VI.2 Pomocí přirozené dedukce dokažte následující formule:

(a) $\varphi \to \varphi$,
(b) $\bot \to \varphi$,
(c) $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$,
(d) $(\varphi \to \psi) \leftrightarrow \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$,
(e) $(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg(\varphi \to \neg\psi)$,
(f) $\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$.

VI.3 Pomocí přirozené dedukce dokažte následující formule:

(a) $(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$,
(b) $(\varphi \to (\psi \to \sigma)) \leftrightarrow (\psi \to (\varphi \to \sigma))$,
(c) $((\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \neg\psi)) \to \neg\varphi$,
(d) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to (\varphi \to \sigma))$.

VI.4 Pomocí přirozené dedukce dokažte:

(a) $\{\varphi\} \vdash \neg(\neg\varphi \wedge \psi)$,
(b) $\{\neg(\varphi \wedge \neg\psi), \varphi\} \vdash \psi$,
(c) $\{\neg\varphi\} \vdash (\varphi \to \psi) \leftrightarrow \neg\varphi$,
(d) $\{\neg\varphi\} \vdash \varphi \to \psi$,
(e) $\{\neg(\varphi \vee \psi)\} \vdash (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$,
(f) $\{(\varphi \vee \psi)\} \vdash (\psi \vee \varphi)$.

VI.5 Pomocí přirozené dedukce dokažte:

(a) $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\varphi \vee \psi)$,
(b) $\{(\varphi \vee \psi), (\varphi \to \sigma), (\psi \to \sigma)\} \vdash \sigma$,
(c) $\{(\varphi \vee \psi), \neg\varphi\} \vdash \psi$,
(d) $\{(\neg\varphi \wedge \neg\psi)\} \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$,
(e) $\{(\varphi \wedge \psi)\} \vdash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$.

VI.6 Pomocí přirozené dedukce dokažte:

(a) $\forall x\varphi(x) \to \forall z\varphi(z)$, pokud se z nevyskytuje ve $\varphi(x)$,
(b) $\forall x\forall y\varphi(x,y) \to \forall y\forall x\varphi(x,y)$,
(c) $\forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow \forall x\varphi(x) \wedge \forall x\psi(x)$,
(d) $\forall x(\varphi \to \psi(x)) \leftrightarrow (\varphi \to \forall x\psi(x))$, pokud $x \notin FV(\varphi)$,
(e) $\neg\forall x\varphi(x) \leftrightarrow \exists x\neg\varphi(x)$,
(f) $\neg\exists x\varphi(x) \leftrightarrow \forall x\neg\varphi(x)$,
(g) $\exists x(\varphi(x) \to \psi) \leftrightarrow (\forall x\varphi(x) \to \psi)$, pokud $x \notin FV(\psi)$,
(h) $\exists x\exists y\varphi(x,y) \leftrightarrow \exists y\exists x\varphi(x,y)$,
(i) $\exists x\varphi \leftrightarrow \varphi$, pokud $x \notin FV(\varphi)$,
(j) $(\exists x\varphi \to \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \to \psi)$.