1. zápočtová písemka ke kurzu *Cvičení z logiky*

(20. května 2010)

A

1. Najděte ekvivalentní formuli v prenexní normální formě k formuli

$$(P(x,x) \to ((\neg\exists x P(x,y)) \to \forall y Q(y))) \vee \forall x \exists y R(x,y).$$

(2 body)

2. Dokažte následující formule bez použití věty o úplnosti v jednom ze tří probíraných kalkulů (hilbertovský, gentzenovský a přirozené dedukce), tak abyste každý z nich použili alespoň jednou:

   (a) $\exists x \exists y \varphi(x,y) \to \exists y \exists x \varphi(x,y)$,

   (b) $\forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \to (\forall x \varphi(x) \wedge \forall x \psi(x))$,

   (c) $\forall x(\varphi(x) \to \neg\psi(x)) \to \neg\exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x))$,

   (d) $(\exists x \varphi(x) \to \forall x \psi(x)) \to \forall x(\varphi(x) \to \psi(x))$.

(4 body)

3. Rozhodněte, zda jsou následující formule logicky platné. U logicky platných formulí se pokuste stručně zdůvodnit, proč platí a u neplatných uveďte interpretaci, při které neplatí.

   (a) $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \to (\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x))$,

   (b) $\forall y \exists x R(x,y) \to \exists x \forall y R(x,y)$,

   (c) $(\forall x P(x) \to \forall x Q(x)) \to \forall x(P(x) \to Q(x))$,

   (d) $\exists x \forall y(P(x) \to P(y))$.

(4 body)

4. Definujte rekurzívně množinu volných proměnných formule φ, kterou značíme $\mathsf{FV}(\varphi)$.

(2 body)

5. Rozhodněte, zda obecně platí následující tvrzení. V případě neplatnosti ekvivalence rozhodněte, zda platí alespoň jedna implikace. Svá tvrzení stručně dokažte či uveďte protipříklad.

   (a) $\psi \models \varphi$, právě tehdy když $\forall x \psi \models \varphi$,

   (b) $\psi \models \varphi$, právě tehdy když $\psi \models \exists x \varphi$.

(2 body)

6. Stručně dokažte či vyvraťte, zda pro libovolnou množinu formulí Γ a formule φ a ψ platí

$$\Gamma, \varphi \vdash \psi, \text{ právě tehdy když } \Gamma \vdash \varphi' \to \psi,$$

kde φ' je univerzální uzávěr formule φ.

(2 body)