2. zápočtová písemka ke kurzu *Cvičení z logiky*

(3. června 2010)

1. Najděte ekvivalentní formuli v prenexní normální formě k formuli

$$\neg(Q(y) \vee (\forall x Q(x) \to \forall x P(x,y))) \to \forall y(\exists x P(x,y) \to Q(x)).$$

(2 body)

2. Dokažte následující formule bez použití věty o úplnosti v jednom ze tří probíraných kalkulů (hilbertovský, gentzenovský a přirozené dedukce), tak abyste každý z nich použili alespoň jednou:

   (a) $\forall x \forall y \varphi(x,y) \to \forall x \varphi(x,x)$,
   (b) $\exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \to (\exists x \varphi(x) \vee \exists x \psi(x))$,
   (c) $(\exists x \varphi(x) \to \forall x \psi(x)) \to \forall x(\varphi(x) \to \psi(x))$,
   (d) $\forall x(\varphi \to \psi(x)) \to (\varphi \to \forall x \psi(x))$, když $x \notin \mathsf{FV}(\varphi)$.

(4 body)

3. Rozhodněte, zda jsou následující formule logicky platné. U logicky platných formulí se pokuste stručně zdůvodnit, proč platí a u neplatných uveďte interpretaci, při které neplatí.

   (a) $\forall x \exists y P(x,y) \to \exists y \forall x P(x,y)$,
   (b) $(\forall x P(x) \to \forall x Q(x)) \to (\exists x P(x) \to \exists x Q(x))$,
   (c) $(\exists x P(x) \to \exists x Q(x)) \to \exists x(P(x) \to Q(x))$,
   (d) $\forall x(\exists y P(y) \to P(x))$.

(4 body)

4. Dokažte pečlivě, že pro libovolné formule φ a ψ platí $\models \varphi \to \psi$, právě tehdy když $\varphi \models \psi$.

(2 body)

5. Stručně dokažte či vyvraťte, zda pro libovolnou množinu formulí Γ, její univerzální uzávěr Γ' a formuli φ platí:

   (a) když $\Gamma \models \varphi$, pak $\Gamma' \models \varphi$,
   (b) když $\Gamma' \models \varphi$, pak $\Gamma \models \varphi$.

(2 body)

6. Stručně dokažte či vyvraťte, zda pro libovolnou množinu formulí Γ platí

$$\Gamma \text{ je sporná, právě tehdy když existují } \varphi_1, \ldots, \varphi_n \text{ tž. } \vdash \neg\varphi_1 \vee \ldots \vee \neg\varphi_n,$$

kde $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ jsou univerzální uzávěry navzájem různých formulí z Γ.

(2 body)