3. zápočtová písemka ke kurzu *Cvičení z logiky*

(2. září 2010)

1. Najděte ekvivalentní formuli v prenexní normální formě k formuli

$$\forall y(P(x) \wedge \exists x(R(y,x) \to \neg P(x))) \to \forall x P(x).$$

(2 body)

2. Dokažte následující formule bez použití věty o úplnosti v jednom ze tří probíraných kalkulů (hilbertovský, gentzenovský a přirozené dedukce), tak abyste každý z nich použili alespoň jednou:

   (a) $\forall x \forall y P(x,y) \to \forall x P(x,x)$,

   (b) $(\exists x P(x) \vee \exists y Q(y)) \to \exists x(P(x) \vee Q(x))$,

   (c) $\exists x(P(x) \to Q(x)) \to (\forall x P(x) \to \exists x Q(x))$,

   (d) $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \to (\neg \exists x \neg P(x) \wedge \neg \exists y \neg Q(y))$.

(4 body)

3. Rozhodněte, zda jsou následující formule logicky platné. U logicky platných formulí se pokuste stručně zdůvodnit, proč platí a u neplatných uveďte interpretaci, při které neplatí.

   (a) $(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \to \forall x(P(x) \vee Q(x))$,

   (b) $\forall y \exists x(P(y) \to \neg P(x))$,

   (c) $(\exists x P(x) \to \exists x Q(x)) \to \exists x(P(x) \to Q(x))$,

   (d) $\exists x \forall y \exists z R(x,y,z) \to \forall y \exists x \exists z R(x,y,z)$.

(4 body)

4. Najděte formuli v jazyce bez rovnosti s pouze jedním binárním predikátovým symbolem $P(x,y)$, která je splnitelná, ale není splnitelná v žádném konečném modelu.

(2 body)

5. Vyberte si jedno z pravidel: generalizace (Gen-A) v hilbertovském kalkulu, pravidlo pro obecný kvantifikátor vpravo ($\forall$-r) v gentzenovském kalkulu nebo zavedení obecného kvantifikátoru ($\forall$I) v kalkulu přirozené dedukce. Vybrané pravidlo přesně naformulujte a stručně zdůvodněte, proč by nebylo korektní, kdybychom vynechali některou z jeho podmínek.

(2 body)

6. Stručně zdůvodněte či vyvraťte, zda obecně platí: Je-li φ splnitelná formule, pak $\vdash \varphi'$, kde φ' je existenční uzávěr formule φ.

(2 body)