Cvičení ke kurzu *Cvičení z logiky*, část I

(4. března 2010)

I.1 Uvažujte strukturu $\mathbb{M}$ pro jazyk s rovností, binárním predikátem $\leq$ a unární funkcí f, jejíž univerzum se sestává ze tří prvků a, b a c. Funkce f je realizována množ. funkcí $f^{\mathbb{M}}(a) = b$, $f^{\mathbb{M}}(b) = c$ a $f^{\mathbb{M}}(c) = c$ a predikát $\leq$ je realizován množ. relací dvojic $\{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, c\rangle\}$. Zdůvodněte, zda v $\mathbb{M}$ platí následující formule:

(a) $\forall x(f(x) \neq x)$,

(b) $\forall x(x \leq f(x))$,

(c) $\forall x \exists y(x \leq y)$,

(d) $\forall x \exists y(x \leq y \wedge x \neq y)$.

I.2 Množiny N, Z, Q a R jsou standardní množiny všech přirozených, celých, racionálních a reálných čísel, predikátový symbol $\{<\}$, funkční symboly $\{+, \cdot\}$ a konstanty $\{0, 1\}$ mají standardní význam.

(a) Najděte sentenci v jazyce $\{+, \cdot, 0, 1\}$, která platí jen v jedné ze struktur $\{R, +, \cdot, 0, 1\}$ a $\{Q, +, \cdot, 0, 1\}$.

(b) Pro každou ze tří struktur $\langle N, <\rangle$, $\langle Z, <\rangle$ a $\langle Q, <\rangle$ najděte sentenci v jazyce $\{<\}$, která v ní platí a ve zbývajících dvou neplatí.

(c) Zdůvodněte, že také struktury $\langle Z, +\rangle$ a $\langle Q, +\rangle$ lze odlišit platností nějaké sentence v jazyce $\{+\}$. Lze i struktury $\langle R, +, \cdot\rangle$ a $\langle Q, +, \cdot\rangle$ odlišit platností nějaké sentence v jazyce $\{+, \cdot\}$?

I.3 Rozhodněte, které z následujících formulí jsou logicky platné. Logicky platné dokažte a u těch, které nejsou, najděte interpretaci, při které neplatí:

(a) $\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x Q(x))$,

(b) $\exists x(P(x) \to Q(x)) \to (\exists x P(x) \to \exists x Q(x))$,

(c) $(\forall x P(x) \to \forall x Q(x)) \to \forall x(P(x) \to Q(x))$,

(d) $(\exists x P(x) \to \exists x Q(x)) \to \exists x(P(x) \to Q(x))$,

(e) $\forall y(\exists x P(x) \to P(y))$,

(f) $\exists x \forall y(P(x) \to P(y))$.

I.4 Definujte rekurzívně funkce BV a FV, které pro libovolnou formuli vrací množinu jejích vázaných a volných proměnných. Je výhodné funkce definovat nejprve pro termy a pak až pro formule.