Cvičení ke kurzu *Cvičení z logiky*, část II

(11. března 2010)

II.1 Dokažte či vyvraťte následující tvrzení.

(a) Libovolná logicky platná formule predikátové logiky je instancí tautologie výrokové logiky.

(b) Libovolná logicky platná otevřená formule predikátové logiky je instancí tautologie výrokové logiky.

II.2 Nechť φ a ψ jsou libovolné formule v jazyce $\mathcal{L}$ a nechť pro každou strukturu $\mathbb{D}$ pro jazyk $\mathcal{L}$ platí když $\mathbb{D} \models \varphi$, pak $\mathbb{D} \models \psi$. Dokažte, že pak platí také když $\models \varphi$, pak $\models \psi$. Ukažte, že obrácené tvrzení však neplatí.

II.3 Rozhodněte, zda platí toto tvrzení: je-li φ otevřená formule jazyka $\mathcal{L}$ a formule $\exists y \varphi$ je logicky platná, pak existuje term t jazyka $\mathcal{L}$ takový, že $\varphi_y(t)$ je logicky platná.

Návod: uvažujte jazyk $\{P, f\}$ a formuli $\exists y(P(f(y)) \vee \neg P(y))$.

II.4 Rozhodněte, které z následujících formulí jsou logicky platné. Logicky platné dokažte (!) a u těch, které nejsou, najděte interpretaci, při které neplatí:

(a) $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x \varphi \to \exists x \psi)$,

(b) $(\exists x \varphi \to \exists x \psi) \to \forall x(\varphi \to \psi)$,

(c) $\exists x(\varphi \to \psi) \to (\forall x \varphi \to \exists x \psi)$,

(d) $(\forall x \varphi \to \exists x \psi) \to \exists x(\varphi \to \psi)$,

(e) $\exists x(\varphi \to \forall y \varphi_x(y))$, když y substituovatelné za x do φ.