

Cvičení ke kurzu *Cvičení z logiky, část III*

(18. března 2010)

III.1 Najděte splnitelnou sentenci neobsahující rovnost, která není splnitelná v žádné struktuře, jejíž nosič má méně než tři prvky.

III.2 Najděte k následujícím formulím ekvivalentní formule v prenexní normální formě:

(a) $\neg((\neg\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)) \wedge (\exists xR(x) \rightarrow \forall xS(x))),$

(b) $\forall xP(x) \equiv \exists xQ(x),$

(c) $\neg(\exists xP(x, y) \wedge (\forall y(Q(y) \rightarrow P(x, x)) \rightarrow \exists x\forall yR(x, y))),$

(d) $((\forall xP(x) \rightarrow \exists yQ(x, y)) \rightarrow Q(x, x)) \rightarrow \exists x\forall yR(x, y).$

III.3 Nechť φ je formule v jazyce \mathcal{L}_2 a nechť $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2$ je seznam všech mimologických symbolů vyskytujících se ve φ . Pak φ platí v každé struktuře pro \mathcal{L}_1 , právě když φ platí v každé struktuře pro \mathcal{L}_2 . Dokažte.

III.4 Rozhodněte, které z následujících formulí jsou axiomy kalkulu *HK* pro predikátovou logiku:

(a) $\forall x\exists yR(x, y) \rightarrow (\exists x\forall yR(x, y) \vee \forall x\exists yR(x, y)),$

(b) $(R(f(x, y), x) \rightarrow R(x, f(x, y))) \rightarrow \exists y(R(y, x) \rightarrow R(x, y)),$

(c) $\forall x\forall y(R(x, y) \rightarrow R(y, x)) \rightarrow \forall y(R(f(x, y), y) \rightarrow R(y, f(x, y))),$

(d) $(\neg\forall x\neg R(x, y) \rightarrow \neg\exists yR(x, y)) \rightarrow ((\neg\forall x\neg R(x, y) \rightarrow \exists yR(x, y)) \rightarrow \forall x\neg R(x, y)),$

(e) $\forall x\forall y(R(x, y) \rightarrow R(y, x)) \rightarrow \forall y(R(f(x, z), y) \rightarrow R(y, f(x, z))),$

(f) $\forall x\forall y(R(x, y) \rightarrow R(y, x)) \rightarrow \forall x(R(x, z) \rightarrow R(z, x)),$

(g) $\forall yR(x, y) \rightarrow (\neg\forall yR(x, y) \rightarrow R(x, y)).$