Cvičení ke kurzu *Cvičení z logiky*, část V

(1. dubna 2010)

V.1 Nechť Γ je libovolná množina formulí, rozhodněte platnost následujících tvrzení. V případě neplatnosti ekvivalence rozhodněte, zda platí alespoň jedna implikace. Svá tvrzení zdůvodněte.

(a) $\psi \vdash \varphi$, právě tehdy když $\forall x\psi \vdash \varphi$,

(b) $\psi \vdash \varphi$, právě tehdy když $\exists x\psi \vdash \varphi$,

(c) $\Gamma, \psi \vdash \varphi$, právě tehdy když $\Gamma \vdash \psi \to \varphi$,

(d) nechť φ je sentence, pak $\Gamma, \psi \vdash \varphi$, právě tehdy když $\Gamma \vdash \psi \to \varphi$,

(e) nechť ψ je sentence, pak $\Gamma, \psi \vdash \varphi$, právě tehdy když $\Gamma \vdash \psi \to \varphi$.

V.2 Rozšiřme jazyk klasické predikátové logiky o kvantifikátory $\exists^{\geq n}$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ s významem existuje alespoň n různých prvků s příslušnou vlastností. Definujme je jako $\mathbb{M} \models \exists^{\geq n} x\varphi[e]$, právě tehdy když existují navzájem různá $a_1, \ldots, a_n \in M$, tž. $\mathbb{M} \models \varphi[e(x/a_i)], 1 \leq i \leq n$.

Navrhněte, jak lze tyto kvantifikátory vyjádřit ve standardním jazyce predikátové logiky s rovností.

V.3 Dokažte, že následující formule je platná ve všech strukturách s konečným nosičem, ale není platná v některých strukturách s nekonečným nosičem.

$$\forall x \forall y \forall z (P(x,x) \wedge (P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z)) \wedge (P(x,y) \vee P(y,x))) \to \exists y \forall x P(y,x)$$

V.4 Uvažujte tzv. monadický fragment klasické predikátové logiky prvního řádu. Tedy klasickou predikátovou logiku (bez rovnosti) pouze s unárními predikáty, která navíc neobsahuje žádné funkční symboly ani konstanty.

Mějme libovolnou strukturu $\mathbb{D} = \langle D, P_1, \ldots, P_n \rangle$ v jazyce $\mathcal{L}$ s predikátovými symboly $P_1, \ldots, P_n$. Definujme relaci ekvivalence $\cong_D$ na D jako

$$a \cong_D b, \text{ právě tehdy když } \mathbb{D} \models P_i(a) \iff \mathbb{D} \models P_i(b), 1 \leq i \leq n.$$

(a) Dokažte, že relace ekvivalence $\cong_D$ má nejvýše 2^n ekvivalenčních tříd.

(b) Definujme strukturu $\mathbb{D}/{\cong_D} = \langle D/{\cong_D}, P_1, \ldots, P_n \rangle$, kde nosič $D/{\cong_D}$ je množina ekvivalenčních tříd na D daných $\cong_D$. Dokažte, že pak pro libovolnou formuli φ v jazyce $\mathcal{L}$ platí

$$\mathbb{D} \models \varphi \iff \mathbb{D}/{\cong_D} \models \varphi.$$

(c) Dokažte, že pro φ v $\mathcal{L}$ platí

$$\models \varphi \iff \mathbb{D} \models \varphi \text{ pro všechny } \mathcal{L}\text{-struktury } \mathbb{D} \text{ s nejvýše } 2^n \text{ prvky.}$$

Využijte toto tvrzení k návrhu rozhodovací procedury pro monadický fragment klasické predikátové logiky.