

# 1. Zápočtová písemka ke kurzu *Logický proseminář*

(8. ledna 2009)

1. Najděte ekvivalentní formule v disjunktivní a konjunktivní normální formě k formuli

$$(p \rightarrow (p \wedge \neg q)) \wedge (q \rightarrow (q \wedge \neg p)).$$

(2 body)

2. Dokažte následující formule v hilbertovském kalkulu bez použití věty o úplnosti:

(a)  $(\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ ,

(b)  $\chi \wedge (\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\varphi \vee \chi) \wedge \psi$ ,

(c)  $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi)$ .

(4 body)

3. Mějme libovolnou množinu formulí  $\Gamma$  takovou, že existuje formule  $\varphi$  pro kterou platí  $\Gamma \models \varphi$  a  $\Gamma \models \neg\varphi$ . Dokažte, že pak  $\Gamma \models \psi$  pro libovolnou formuli  $\psi$ .

(2 body)

4. Co víte obecně o náležením formule  $\varphi \rightarrow \psi$  do množin *SAT* a *TAUT*, pokud víte, že

(a)  $\varphi \notin SAT$ ,

(b)  $\varphi \in SAT$ ,

(c)  $\varphi \in TAUT$ ,

(d)  $\psi \notin SAT$ ,

(e)  $\psi \in SAT$ ,

(f)  $\psi \in TAUT$ .

(3 body)

5. Zdůvodněte, že z věty o silné úplnosti plyne věta o kompaktnosti.

(2 body)

6. Najděte formule  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  a  $\psi_4$  takové, že pro libovolnou formuli  $\varphi$  ve které se vyskytuje jediný výrokový atom  $p$  platí, že  $\varphi$  je ekvivalentní jedné z formulí  $\psi_i$ , kde  $1 \leq i \leq 4$ .

(2 body)

7. Mějme libovolné dvě ekvivalentní formule  $\psi$  a  $\psi'$ . Z libovolné formule  $\varphi$  získáme formuli  $\varphi'$  současným nahrazením všech výskytů  $\psi$  ve formuli  $\varphi$  formulí  $\psi'$ . Dokažte, že formule  $\varphi$  a  $\varphi'$  jsou také ekvivalentní.

(5 bodů)