

2. Zápočtová písemka ke kurzu *Logický proseminář*

(22. ledna 2009)

1. Najděte ekvivalentní formule v disjunktivní a konjunktivní normální formě k formuli

$$(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow s) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)).$$

(2 body)

2. Dokažte následující formule v hilbertovském kalkulu bez použití věty o úplnosti:

(a) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)),$

(b) $(\varphi \vee \varphi) \wedge \psi \rightarrow (\psi \wedge \varphi),$

(c) $(\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \varphi).$

(4 body)

3. Mějme libovolnou množinu formulí Γ takovou, že pro libovolné formule φ, ψ a χ platí $\Gamma \models (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi$. Dokažte, že pak je Γ nesplnitelná množina.

(2 body)

4. Co víte obecně o náležitosti formulí φ a ψ do množin *SAT* a *TAUT*, pokud víte, že

(a) $\neg\varphi \wedge \psi \notin SAT,$

(b) $\neg\varphi \wedge \psi \in SAT,$

(c) $\neg\varphi \wedge \psi \in TAUT,$

(d) $\varphi \rightarrow \psi \notin SAT,$

(e) $\varphi \rightarrow \psi \in SAT,$

(f) $\varphi \rightarrow \psi \in TAUT.$

(3 body)

5. Rozhodněte a zdůvodněte, zda může existovat k sémantice klasické výrokové logiky hilbertovský důkazový systém takový, že

(a) platí věta o úplnosti a neplatí věta o korektnosti,

(b) platí věta o korektnosti a neplatí věta o úplnosti.

(2 body)

6. Řekneme, že množina Γ je nezávislá, pokud pro libovolnou formuli $\varphi \in \Gamma$ platí

$$\Gamma - \{\varphi\} \not\models \varphi.$$

Dokažte, že libovolná konečná množina Γ má podmnožinu Δ , která je nezávislá a navíc pro libovolnou formuli $\varphi \in \Gamma$ platí $\Delta \models \varphi$.

(2 body)

7. Nechť $\text{delka}(\varphi)$ je délka formule φ měřená jako počet symbolů a $\text{podfle}(\varphi)$ je počet jejích podformulí. Dokažte pečlivě, že pro libovolnou formuli φ platí

$$\text{podfle}(\varphi) \leq \text{delka}(\varphi).$$

(5 bodů)