3. Zápočtová písemka ke kurzu *Logický proseminář*

(5. února 2009)

1. Najděte ekvivalentní formule v disjunktivní a konjunktivní normální formě k formuli

$$((q \to p) \wedge (q \vee r)) \vee r.$$

(2 body)

2. Dokažte následují formule v hilbertovském kalkulu bez použití věty o úplnosti:

   (a) $(\varphi \to (\psi \to \varphi)) \to (\psi \to (\varphi \to \varphi))$,

   (b) $(\varphi \vee \psi) \to ((\psi \vee \varphi) \wedge (\psi \vee \varphi))$,

   (c) $(\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\varphi)$.

(4 body)

3. Mějme libovolnou množinu formulí Γ takovou, že pro libovolné formule φ a ψ platí $\Gamma \models \varphi \vee \psi$. Dokažte, že pak je Γ nesplnitelná množina.

(2 body)

4. Co víte obecně o náležení formulí φ a ψ do množin SAT a $TAUT$, pokud víte, že

   (a) $\neg\varphi \vee \psi \notin SAT$,

   (b) $\neg\varphi \vee \psi \in SAT$,

   (c) $\neg\varphi \vee \psi \in TAUT$,

   (d) $\varphi \wedge \psi \notin SAT$,

   (e) $\varphi \wedge \psi \in SAT$,

   (f) $\varphi \wedge \psi \in TAUT$.

(3 body)

5. Dokažte, že libovolnou spojku z množiny $\{\wedge, \to, \leftrightarrow\}$ lze definovat pomocí zbylých dvou.

(2 body)

6. Nechť Σ je maximálně bezesporná množina formulí a φ a ψ jsou formule, pak $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$, právě tehdy když $\varphi \notin \Sigma$ nebo $\psi \in \Sigma$. Dokažte.

(2 body)

7. Mějme libovolnou formuli φ a libovolná pravdivostní ohodnocení u a v, pro která platí, že přiřazují všem výrokovým atomům vyskytujícím se ve φ stejnou pravdivostní hodnotu, tedy pro libovolný výrokový atom p_i vyskytující se ve φ platí $u(p_i) = v(p_i)$. Pak platí $u(\varphi) = v(\varphi)$. Dokažte.

(5 bodů)