

4. Zápočtová písemka ke kurzu *Logický proseminář*

(11. března 2009)

1. Najděte ekvivalentní formule v disjunktivní a konjunktivní normální formě k formuli

$$(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow \neg r) \rightarrow \neg p)$$

(2 body)

2. Dokažte následující formule v hilbertovském kalkulu bez použití věty o úplnosti:

- (a) $(\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$,
- (b) $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow ((\psi \vee \chi) \wedge (\varphi \vee \chi))$,
- (c) $\varphi \rightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \neg\psi))$.

(4 body)

3. Mějme libovolnou splnitelnou formuli φ . Dokažte, že pak existuje splnitelná množina Γ obsahující pouze literály (atomy nebo jejich negace) pro kterou platí $\Gamma \models \varphi$.

(2 body)

4. Co víte obecně o náležitosti formule $\neg\varphi \rightarrow \psi$ do množin *SAT* a *TAUT*, pokud víte, že:

- (a) $\varphi \notin SAT$,
- (b) $\varphi \in SAT$,
- (c) $\varphi \in TAUT$,
- (d) $\psi \notin SAT$,
- (e) $\psi \in SAT$,
- (f) $\psi \in TAUT$.

(3 body)

5. Dokažte či vyvráťte:

- (a) $\Gamma \vdash \varphi$ a $\Delta \vdash \varphi$, právě tehdy když $\Gamma \cap \Delta \vdash \varphi$,
- (b) $\Gamma \vdash \varphi$ nebo $\Delta \vdash \varphi$, právě tehdy když $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$.

(2 body)

6. Pro libovolné pravdivostní ohodnocení v je množina formulí $\Sigma = \{\varphi : v(\varphi) = 1\}$ maximálně bezesporná. Dokažte pouze s použitím věty o korektnosti bez využití věty o úplnosti.

(2 body)

7. Nechť funkce *zavorky*(φ) a *spojky*(φ) vrací počet závorek respektive počet logických spojek ve formuli φ . Dokažte pečlivě, že pro libovolnou formuli φ se standardním závorkováním obsahující pouze unární a binární spojky platí

$$\text{spojky}(\varphi) = \frac{\text{zavorky}(\varphi)}{2}.$$

(5 bodů)