Cvičení ke kurzu *Logický proseminář*, část II

(23. října 2008)

II.1 Předpokládejme libovolnou formuli φ a funkce $\mathsf{delka}(\varphi)$ a $\mathsf{zavorky}(\varphi)$ označující délku formule (ve smyslu počtu symbolů) respektive počet závorek ve formuli. Určete minimální a maximální hodnoty výrazu

$$\frac{\mathsf{zavorky}(\varphi)}{\mathsf{delka}(\varphi)}.$$

II.2 Mějme libovolnou formuli φ a libovolná pravdivostní ohodnocení u a v, pro která platí, že přiřazují všem výrokovým atomům vyskytujícím se ve φ stejnou pravdivostní hodnotu, tedy pro libovolný výrokový atom p_i vyskytující se ve φ platí $u(p_i) = v(p_i)$. Pak platí $u(\varphi) = v(\varphi)$. Dokažte.

II.3 Určete, které z následujících výrokových formulí jsou tautologie:

(a) $((p \to q) \to q) \to q$,
(b) $\neg p \to \neg(p \vee q)$,
(c) $\neg p \to \neg(p \wedge q))$,
(d) $p \to p \wedge (p \vee q)$,
(e) $p \to p \vee (p \wedge q)$,
(f) $(p \to q) \vee (q \to p)$,
(g) $\neg p \to \neg(p \vee (p \wedge q))$,
(h) $(p \to (q \vee r)) \to (q \vee (p \to r))$,
(i) $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$,
(j) $(p \to q) \wedge q \to p$,
(k) $\neg p \to (p \wedge q)$,
(l) $((p \to q) \to p) \to p$,
(m) $((\neg p \equiv q) \wedge r) \equiv (q \to (\neg r \vee s))$,
(n) $(p_1 \to (p_2 \to (p_3 \to \ldots \to (p_{n-1} \to p_n) \ldots)$.

II.4 Ověřte, které z následujících formulí jsou tautologickým důsledkem (vyplývají) z teorie $T = \{(p \to q) \wedge r, q \wedge r, r \to s\}$:

(a) $q \to (\neg p \wedge s)$,
(b) $p \to s$,
(c) $s \to t$,
(d) $(\neg s \to r) \wedge \neg q$,
(e) $q \wedge r$,
(f) p,
(g) $((p \to q) \to p) \to p$,
(h) $(\neg p \to (q \vee \neg r)) \vee s$.

II.5 Zdůvodněte, zda ve výrokové logice obecně platí následující tvrzení:

(a) když $\Gamma \models \varphi$ a $\Gamma \models \psi$, pak $\Gamma \models \varphi \wedge \psi$,
(b) když $\Gamma \models \varphi \wedge \psi$, pak $\Gamma \models \varphi$ a $\Gamma \models \psi$,
(c) když $\Gamma \models \varphi$ nebo $\Gamma \models \psi$, pak $\Gamma \models \varphi \vee \psi$,
(d) když $\Gamma \models \varphi \vee \psi$, pak $\Gamma \models \varphi$ nebo $\Gamma \models \psi$,

Poznámka: bod (d) neplatí dokonce pro $\varphi = p$ a $\psi = q$!

II.6 V parlamentu bylo řečeno:

(a) o platu poslanců nerozhodují poslanci,
(b) plat poslanců se řídí platem státního úředníka,

(c) o platu státního úředníka rozhodují poslanci,

(d) jestliže plat poslanců se řídí platem státního úředníka, a o platu státního úředníka rozhodují poslanci, pak o platu poslanců rozhodují poslanci.

Předsedající projevil souhlas s těmito výroky a zeptal se: „Co z toho vyplývá?“ „Z toho vyplývá, že můj pes mluví španělsky“, řekl muž z galerie. „Nerušte svými absurditami, nebo Vás nechám vyvést,“ řekl předsedající. Otázka zní: rušil muž z galerie absurdním výrokem? (zdůvodněte!)