

Cvičení ke kurzu *Logický proseminář*, část III

(30. října 2008)

III.1 Mějme libovolnou formuli φ , nechť $\bar{\varphi}$ je výsledkem nahrazení každého výskytu výrokového atomu ve φ jeho negací. Každou podformuli tvaru p ve φ tedy nahradíme formulí $\neg p$. Dokažte, že je-li φ tautologie, pak je i $\bar{\varphi}$ tautologie.

III.2 Dokažte, že jsou následující formule spolu ekvivalentní:

$\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$	$(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$	asociativita konjunkce,
$\varphi \vee (\psi \vee \chi)$	$(\varphi \vee \psi) \vee \chi$	asociativita disjunkce,
$\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$	$(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$	distributivita \vee vůči \wedge ,
$\varphi \wedge (\psi \vee \chi)$	$(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$	distributivita \wedge vůči \vee ,
$\varphi \rightarrow \psi$	$\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$	kontrapozice,
$\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\neg\varphi \vee \neg\psi$	de Morgan,
$\neg(\varphi \vee \psi)$	$\neg\varphi \wedge \neg\psi$	de Morgan,
$\varphi \wedge \varphi$	φ	idempotence konjunkce,
$\varphi \vee \varphi$	φ	idempotence disjunkce,
$\neg\neg\varphi$	φ	zákon dvojité negace.

III.3 Zjednodušte následující formule (najděte jednodušší ekvivalentní výroky).

- (a) $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \varphi$, (c) $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi$, (e) $(\varphi \wedge \psi) \vee \varphi$,
(b) $(\varphi \rightarrow \psi) \vee \neg\varphi$, (d) $\varphi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)$, (f) $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi$.

III.4 Pro libovolnou množinu formulí Γ označme $\text{Cl}(\Gamma)$ (od anglického *closure*) množinu všech tautologických důsledků množiny Γ . Rozhodněte a dokažte případně vyvráťte (protipříkladem), zda pro každou množinu formulí Γ respektive pro každé dvě množiny Γ a Δ platí:

- (a) $\Gamma \subseteq \text{Cl}(\Gamma)$,
(b) $\text{Cl}(\text{Cl}(\Gamma)) = \text{Cl}(\Gamma)$,
(c) $\text{Cl}(\Gamma \cup \Delta) = \text{Cl}(\Gamma) \cup \text{Cl}(\Delta)$,
(d) $\Gamma \subseteq \Delta \implies \text{Cl}(\Gamma) \subseteq \text{Cl}(\Delta)$.

Pokud je v (b) nebo v (c) odpověď ne, rozhodněte, zda platí alespoň některá inkluze.