Cvičení ke kurzu *Logický proseminář*, část IV

(13. listopadu 2008)

IV.1 Víme-li, že formule $\varphi \equiv \psi$ má pravdivostní hodnotu nepravda, co můžeme vyvodit o pravdivostní hodnotě následujících formulí?

(a) $\varphi \wedge \psi$,

(b) $\varphi \vee \psi$,

(c) $\varphi \rightarrow \psi$,

(d) $\varphi \wedge \chi \equiv \psi \wedge \chi$.

IV.2 K následujícím formulím najděte ekvivalentní formule v DNF i CNF. Poté najděte také ekvivalentní formule v úplné DNF i CNF.

(a) $(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$,

(b) $\neg p \vee (q \rightarrow \neg r)$,

(c) $(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge r)$,

(d) $(p \vee q) \equiv \neg r$.

IV.3 Dokažte, že množina spojek $\rightarrow, \wedge, \vee$ není v jazyce bez konstanty sporu funkčně úplná.

IV.4 Dokažte, že následující množiny spojek jsou tzv. funkčně úplné, tedy že každá formule φ je ekvivalentní s formulí ψ, která neobsahuje jiné logické spojky než

(a) $\wedge$ a $\neg$,

(b) $\rightarrow$ a $\neg$,

(c) $\downarrow$[1],

(d) $|$[2].

Návod: Víme-li o nějaké množině spojek, že je tzv. funkčně úplná (stačí k vyjadření libovolné boolovské funkce), což jsme si dokázali pro $\{\vee, \neg\}$, pak stačí ukázat, jak lze spojky této množiny definovat pomocí spojek, které uvažujeme (proč?). K důkazu (a) tedy např. stačí definovat spojky $\vee$ a $\neg$ pomocí spojek $\wedge$ a $\neg$. V bodě (c) a (d) lze $\neg p$ definovat jako $p \downarrow p$ respektive $p \mid p$ (ověřte!). Nyní již k důkazu stačí definovat spojku $\vee$ nebo $\wedge$ (pokud máte vyřešen bod (a)) a při svých úvahách již nyní můžete používat i spojku $\neg$ (proč?). Možná se vám při úvahách bude hodit také slovní význam spojek $\downarrow$ a $|$.

---

[1] Této spojce se říká *Peircova šipka* a jde o onu spojku vyjadřující ani … ani … . Definuje ji tabulka:

$\downarrow$	1	0
1	0	0
0	0	1

[2] Jde o *Shefferovu operaci*, která vyjadřuje neplatí současně … a … . Je definována tabulkou:

$\mid$	1	0
1	0	1
0	1	1