Cvičení ke kurzu *Logický proseminář*, část V

(20. listopadu 2008)

Mějme kalkulus HK s pravidlem modus ponens a se schématy axiomů:

(A1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$,

(A2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$,

(A3) $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi)$,

(A4) $\varphi \wedge \psi \to \varphi, \qquad \varphi \wedge \psi \to \psi$,

(A5) $\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$,

(A6) $\varphi \to \varphi \vee \psi, \qquad \psi \to \varphi \vee \psi$,

(A7) $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi))$

K dokazování můžete používat větu o dedukci a tedy také $\varphi \to \varphi$. Dále však používejte pouze to, co si sami dokážete, poté samozřejmě i kdykoliv později. Naopak rozhodně nepoužívejte větu o úplnosti!

V.1 V HK dokažte následující formule:

(a) $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$,
(b) $\varphi \to ((\varphi \to \psi) \to \psi)$,
(c) $(\varphi \to (\varphi \to \psi)) \to (\varphi \to \psi)$,
(d) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$,
(e) $((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$.

V.2 Uvažujte smyšlený výrokový logický systém, ve kterém se připouští jediná logická spojka $\to$, jediné axiomatické schéma $\varphi \to \varphi$ a jediné odvozovací pravidlo modus ponens. Rozhodněte, zda v tomto systému:

(a) lze dokázat i nějakou formuli, která není axiomem,

(b) platí věta o dedukci.