Cvičení ke kurzu *Logický proseminář*, část VI

(27. listopadu 2008)

Mějme kalkulus HK s pravidlem modus ponens a se schématy axiomů:

(A1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$,

(A2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$,

(A3) $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi)$,

(A4) $\varphi \wedge \psi \to \varphi, \qquad \varphi \wedge \psi \to \psi$,

(A5) $\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$,

(A6) $\varphi \to \varphi \vee \psi, \qquad \psi \to \varphi \vee \psi$,

(A7) $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi))$

K dokazování můžete používat větu o dedukci a vše co jsme doposud dokázali. Dále však používejte pouze to, co si sami dokážete, poté samozřejmě i kdykoliv později. Naopak rozhodně nepoužívejte větu o úplnosti!

VI.1 V HK dokažte následující formule:

(a) $(\varphi \to (\varphi \to \psi)) \to (\varphi \to \psi)$,

(b) $(\neg\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \varphi)$,

(c) $(\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\varphi)$,

(d) $(\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)) \to ((\varphi \wedge \psi) \wedge \chi)$,

(e) $(\varphi \vee \varphi) \to \varphi$,

(f) $(\varphi \vee (\psi \vee \chi)) \to ((\varphi \vee \psi) \vee \chi)$,

(g) $(\varphi\wedge(\psi\vee\chi))\to((\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\chi))$,

(h) $((\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\chi))\to(\varphi\wedge(\psi\vee\chi))$,

(i) $(\varphi\vee(\psi\wedge\chi))\to((\varphi\vee\psi)\wedge(\varphi\vee\chi))$,

(j) $((\varphi\vee\psi)\wedge(\varphi\vee\chi))\to(\varphi\vee(\psi\wedge\chi))$.

VI.2 Dokažte lemma o důkazu sporem, které pro libovolnou množinu formulí Γ a formule φ, ψ říká, že platí $\Gamma \vdash \varphi$, právě tehdy když $\Gamma, \neg\varphi \vdash \neg(\psi \to \psi)$.

Návod: Použijte standardní prostředky a vhodné již dokázané formule.

VI.3 Uvažujte hilbertovský kalkulus obsahující pouze spojky negace a implikace a skládající se pouze ze schémat axiomů (A1)–(A3). Definujme $\varphi \wedge \psi$ jako zkratku za $\neg(\varphi \to \neg\psi)$ a $\varphi \vee \psi$ jako zkratku za $\neg\varphi \to \psi$. Dokažte, že v tomto kalkulu lze dokázat stejné formule jako v původním kalkulu HK, přepisujeme-li konjukci a disjunkci jak bylo definováno.

Návod: Na jednu stranu není co dokazovat, na druhou stranu stačí dokázat v novém kalkulu schémata axiomů (A4)–(A7) přepsaná pomocí výše uvedených definic.

VI.4 Dokažte, že nahradíme-li v původním kalkulu HK schéma axiomu (A3) dvojicí schémat

(A3a) $\neg\neg\varphi \to \varphi$,

(A3b) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$, pak dostáváme hilbertovský kalkulus, ve kterém dokážeme stejné formule jako v původním kalkulu HK.

Poznámka: Axiom (A3) lze nahradit také jediným axiomem

(A3c) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$,

což již máme na jednu stranu dokázané, na druhou stranu to vyžaduje trochu práce. Kalkul s (A3c) místo (A3) je v literatuře dosti rozšířen.