

Cvičení ke kurzu *Logický proseminář*, část VIII

(11. prosince 2008)

VIII.1 Dokažte či vyvráťte následující tvrzení: Nahradíme-li ve formuli term libovolným termem, dostáváme opět formuli.

VIII.2 Uvažujte strukturu \mathbb{M} pro jazyk s rovností, binárním predikátem \leq a unární funkcí f , jejíž univerzum se sestává ze tří prvků a, b a c . Funkce f je realizována množ. funkcí $f^{\mathbb{M}}(a) = b$, $f^{\mathbb{M}}(b) = c$ a $f^{\mathbb{M}}(c) = c$ a predikát \leq je realizován množ. relací dvojic $\{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, c \rangle\}$. Zdůvodněte, zda v \mathbb{M} platí následující formule:

- (a) $\forall x(f(x) \neq x)$,
- (b) $\forall x(x \leq f(x))$,
- (c) $\forall x \exists y(x \leq y)$,
- (d) $\forall x \exists y(x \leq y \wedge x \neq y)$.

VIII.3 Množiny N , Z , Q a R jsou standardní množiny všech přirozených, celých, racionálních a reálných čísel, predikátový symbol $\{<\}$, funkční symboly $\{+, \cdot\}$ a konstanty $\{0, 1\}$ mají standardní význam.

- (a) Najděte sentenci v jazyce $\{+, \cdot, 0, 1\}$, která platí v jedné ze struktur \mathbb{R} a \mathbb{Q} .
- (b) Pro každou ze tří struktur $\langle N, < \rangle$, $\langle Z, < \rangle$ a $\langle Q, < \rangle$ najděte sentenci v jazyce $\{<\}$, která v ní platí a ve zbývajících dvou neplatí.
- (c) Zdůvodněte, že také struktury $\langle Z, + \rangle$ a $\langle Q, + \rangle$ lze odlišit platností nějaké sentence. Lze i struktury $\langle R, +, \cdot \rangle$ a $\langle Q, +, \cdot \rangle$ odlišit platností nějaké sentence?

VIII.4 Jaké co možná nejobecnější podmínky musí být splněny, aby platilo tvrzení: Když

$$\mathbb{D} \models \varphi[e_1], \text{ právě tehdy když } \mathbb{D} \models \varphi[e_2],$$

pak jsou ohodnocení e_1 a e_2 shodná.