

1. zápočtová písemka ke kurzu *Cvičení z logiky*

(7. ledna 2010)

A

1. Najděte ekvivalentní formule v disjunktivní a konjunktivní normální formě k formuli

$$\neg(p \rightarrow q) \vee (\neg p \wedge r \wedge s).$$

(2 body)

2. Dokažte následující formule v hilbertovském kalkulu bez použití věty o úplnosti:

- (a) $(\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$,
- (b) $\varphi \vee \psi \rightarrow (\psi \wedge \psi) \vee \varphi$,
- (c) $(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \neg\varphi)$.

(4 body)

3. Definujte pojem splnitelnosti množiny formulí ve výrokové logice pomocí pojmu vyplývání ve výrokové logice.

(2 body)

4. Nechť Γ je množina výrokových formulí taková, že každé pravdivostní ohodnocení splňuje některou formuli v Γ . Pak existuje konečná množina formulí $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subseteq \Gamma$ taková, že $\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n$ je tautologie. Dokažte s použitím věty o kompaktnosti, použitou formulací přesně uveďte.

(3 body)

5. Dokažte či vyvráťte, zda ve výrokové logice obecně platí následující tvrzení:

- (a) když $\Gamma \models \varphi \wedge \psi$, pak $\Gamma \models \varphi$ a $\Gamma \models \psi$,
- (b) když $\Gamma \models \varphi$ nebo $\Gamma \models \psi$, pak $\Gamma \models \varphi \vee \psi$,
- (c) když $\Gamma \models \varphi \vee \psi$, pak $\Gamma \models \varphi$ nebo $\Gamma \models \psi$.

(3 body)

6. Mějme libovolnou formuli φ a libovolná pravdivostní ohodnocení u a v , pro která platí, že přiřazují všem výrokovým atomům vyskytujícím se ve φ stejnou pravdivostní hodnotu, tedy pro libovolný výrokový atom p_i vyskytující se ve φ platí $u(p_i) = v(p_i)$. Pak platí $u(\varphi) = v(\varphi)$. Podrobně (!) dokažte.

(5 bodů)