

2. zápočtová písemka ke kurzu *Cvičení z logiky*

(21. ledna 2010)

1. Najděte ekvivalentní formule v disjunktivní a konjunktivní normální formě k formuli

$$\neg(p \rightarrow \neg q) \wedge ((p \vee s) \rightarrow r).$$

(2 body)

2. Dokažte následující formule v hilbertovském kalkulu bez použití věty o úplnosti:

(a) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)),$

(b) $((\varphi \vee \varphi) \wedge \psi) \rightarrow (\psi \wedge \varphi),$

(c) $\varphi \rightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \neg\psi)).$

(4 body)

3. Navrhněte a zdůvodněte, jak lze rozhodnout zda $\Gamma \models \varphi$ pro libovolnou konečnou množinu výrokových formulí Γ a libovolnou výrokovou formuli φ .

(2 body)

4. Řekneme, že množina Γ je nezávislá, pokud pro libovolnou formuli $\varphi \in \Gamma$ platí

$$\Gamma - \{\varphi\} \not\vdash \varphi.$$

Dokažte, že libovolná konečná množina Γ má podmnožinu Δ , která je nezávislá a navíc pro libovolnou formuli $\varphi \in \Gamma$ platí $\Delta \vdash \varphi$.

(3 body)

5. Dokažte či vyvráťte:

(a) $\Gamma \vdash \varphi$ a $\Delta \vdash \varphi$, právě tehdy když $\Gamma \cap \Delta \vdash \varphi$,

(b) $\Gamma \vdash \varphi$ nebo $\Delta \vdash \varphi$, právě tehdy když $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$,

(c) $\Gamma \vdash \varphi$ a $\Delta \not\vdash \varphi$, právě tehdy když $\Gamma \setminus \Delta \vdash \varphi$.

(3 body)

6. Necht' pro libovolnou formuli φ funkce $\text{podfle}(\varphi)$ vrací počet podformulí formule φ a funkce $\text{spojky}(\varphi)$ vrací počet logických spojek vyskytujících se ve formuli φ . Definujte rekurzivně funkce podfle a spojky a dokažte, že pro libovolnou formuli φ platí $\text{podfle}(\varphi) \leq 2 \cdot \text{spojky}(\varphi) + 1$.

(5 bodů)