

3. zápočtová písemka ke kurzu *Cvičení z logiky*

(11. února 2010)

1. Najděte ekvivalentní formule v disjunktivní a konjunktivní normální formě k formuli

$$((p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \vee s)) \vee (r \rightarrow (s \wedge r)).$$

(2 body)

2. Dokažte následující formule v hilbertovském kalkulu bez použití věty o úplnosti:

- (a) $\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi)$,
- (b) $\varphi \vee (\psi \wedge \psi) \rightarrow \psi \vee (\varphi \vee \varphi)$,
- (c) $(\varphi \vee \neg\psi) \wedge (\varphi \vee \psi) \rightarrow \varphi$.

(4 body)

3. Doplňte následující tvrzení a stručně ho dokažte:

$$\Gamma \vdash \varphi, \text{ právě tehdy když množina } \dots \text{ je sporná.}$$

(2 body)

4. Dokažte, že existují formule ψ_1, ψ_2, ψ_3 a ψ_4 , tž. pro libovolnou formuli φ obsahující pouze jediný výrokový atom p platí, že φ je ekvivalentní jedné z ψ_i , kde $1 \leq i \leq 4$.

(3 body)

5. Dokažte či vyvráťte, zda obecně platí:

- (a) $\Gamma \models \varphi \rightarrow \neg\varphi$ a $\Gamma \models \neg\varphi \rightarrow \varphi$, pak $\Gamma \models \psi$,
- (b) $\Gamma \models \varphi$, pak φ je splnitelná,
- (c) $\Gamma \models \varphi \vee \psi$ a $\Gamma \models \neg\varphi$, pak $\Gamma \models \psi$.

(3 body)

6. Necht' pro libovolnou formuli φ funkce $\text{zavorky}(\varphi)$ vrací počet závorek obsažených ve formuli φ a funkce $\text{spojky}(\varphi)$ vrací počet logických spojek vyskytujících se ve formuli φ . Definujte rekurzivně funkce zavorky a spojky a dokažte, že pro libovolnou formuli φ platí

$$\text{spojky}(\varphi) = \frac{\text{zavorky}(\varphi)}{2},$$

pokud vyžadujeme striktní definici formule, tedy $(\neg\varphi)$ a $(\varphi \circ \psi)$ jsou správně utvořené formule.

(5 bodů)