Cvičení ke kurzu *Cvičení z logiky*, část VI

(19. listopadu 2009)

VI.1 Dokažte, že množina spojek $\rightarrow, \wedge, \vee$ není v jazyce bez konstanty sporu funkčně úplná.

VI.2 Dokažte, že následující množiny spojek jsou tzv. funkčně úplné, tedy že každá formule φ je ekvivalentní s formulí ψ, která neobsahuje jiné logické spojky než

(a) $\wedge$ a $\neg$,

(b) $\rightarrow$ a $\neg$,

(c) $\downarrow$[1],

(d) $|$[2].

Návod: Víme-li o nějaké množině spojek, že je tzv. funkčně úplná (stačí k vyjadření libovolné boolovské funkce), což jsme si dokázali pro $\{\vee, \wedge \neg\}$, pak stačí ukázat, jak lze spojky této množiny definovat pomocí spojek, které uvažujeme (proč?). K důkazu (a) tedy např. stačí definovat spojky $\vee$, $\wedge$ a $\neg$ pomocí spojek $\wedge$ a $\neg$. V bodě (c) a (d) si např. můžete definovat $\neg p$ a při svých dalších úvahách již nyní můžete používat i spojku $\neg$ (proč?). Možná se vám při úvahách bude hodit také slovní význam spojek $\downarrow$ a $|$.

---

[1] Této spojce se říká *Peircova šipka* a jde o onu spojku vyjadřující *ani* ... *ani* .... Definuje ji tabulka:

$\downarrow$	1	0
1	0	0
0	0	1

[2] Jde o *Shefferovu operaci*, která vyjadřuje *neplatí současně* ... *a* .... Je definována tabulkou:

$\vert$	1	0
1	0	1
0	1	1