

Cvičení ke kurzu *Cvičení z logiky*, část VII
(26. listopadu 2009)

Mějme kalkulus HK s pravidlem modus ponens a se schémataxiomů:

- (A1) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$,
- (A2) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$,
- (A3) $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$,
- (A4) $\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi, \quad \varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$,
- (A5) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$,
- (A6) $\varphi \rightarrow \varphi \vee \psi, \quad \psi \rightarrow \varphi \vee \psi$,
- (A7) $(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \vee \psi \rightarrow \chi))$

K dokazování můžete používat větu o dedukci a tedy také $\varphi \rightarrow \varphi$. Dále však používejte pouze to, co si sami dokážete, poté samozřejmě i kdykoliv později. Naopak rozhodně nepoužívejte větu o úplnosti!

VII.1 V HK dokažte následující formule:

- (a) $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$,
- (b) $\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi)$,
- (c) $(\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$,
- (d) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$,
- (e) $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi))$.

VII.2 Uvažujte smyšlený výrokový logický systém, ve kterém se připouští jediná logická spojka \rightarrow , jediné axiomatické schéma $\varphi \rightarrow \varphi$ a jediné odvozovací pravidlo modus ponens. Rozhodněte, zda v tomto systému:

- (a) lze dokázat i nějakou formuli, která není axiomem,
- (b) platí věta o dedukci.