Cvičení ke kurzu *Cvičení z logiky*, část VIII

(3. prosince 2009)

Mějme kalkulus HK s pravidlem modus ponens a se schématy axiomů:

(A1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$,

(A2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$,

(A3) $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi)$,

(A4) $\varphi \wedge \psi \to \varphi, \qquad \varphi \wedge \psi \to \psi$,

(A5) $\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$,

(A6) $\varphi \to \varphi \vee \psi, \qquad \psi \to \varphi \vee \psi$,

(A7) $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi))$

K dokazování můžete používat větu o dedukci a tedy také $\varphi \to \varphi$. Dále však používejte pouze to, co si sami dokážete, poté samozřejmě i kdykoliv později. Naopak rozhodně nepoužívejte větu o úplnosti!

VIII.1 V HK dokažte následující formule:

(a) $(\neg\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \varphi)$,
(b) $(\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\varphi)$,
(c) $(\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)) \to ((\varphi \wedge \psi) \wedge \chi)$,
(d) $(\varphi \vee \varphi) \to \varphi$,
(e) $(\varphi \vee (\psi \vee \chi)) \to ((\varphi \vee \psi) \vee \chi)$,
(f) $(\varphi\wedge(\psi\vee\chi))\to((\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\chi))$,
(g) $((\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\chi))\to(\varphi\wedge(\psi\vee\chi))$,
(h) $(\varphi\vee(\psi\wedge\chi))\to((\varphi\vee\psi)\wedge(\varphi\vee\chi))$,
(i) $((\varphi\vee\psi)\wedge(\varphi\vee\chi))\to(\varphi\vee(\psi\wedge\chi))$.

VIII.2 Dokažte lemma o důkazu sporem, které pro libovolnou množinu formulí Γ a formule φ, ψ říká, že platí $\Gamma \vdash \varphi$, právě tehdy když $\Gamma, \neg\varphi \vdash \psi \wedge \neg\psi$.

VIII.3 Uvažujte hilbertovský kalkulus obsahující pouze spojky negace a implikace a skládající se pouze ze schémat axiomů (A1)–(A3). Definujme $\varphi \wedge \psi$ jako zkratku za $\neg(\varphi \to \neg\psi)$ a $\varphi \vee \psi$ jako zkratku za $\neg\varphi \to \psi$. Dokažte, že v tomto kalkulu lze dokázat stejné formule jako v původním kalkulu HK, přepisujeme-li konjukci a disjunkci jak bylo definováno.

Návod: Na jednu stranu není co dokazovat, na druhou stranu stačí dokázat v novém kalkulu schémata axiomů (A4)–(A7) přepsaná pomocí výše uvedených definic.

VIII.4 Dokažte, že nahradíme-li v původním kalkulu HK schéma axiomu (A3) schématem

(A3a) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$,

pak oba systémy dokazují stejné formule.

Návod: Na jednu stranu již máme tvrzení dokázané, druhá strana vyžaduje trochu práce. Kalkul s (A3a) místo (A3) je v literatuře dosti rozšířen.