Cvičení ke kurzu *Cvičení z logiky*, část IX

(8. prosince 2009)

Mějme kalkulus HK s pravidlem modus ponens a se schématy axiomů:

(A1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$,

(A2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$,

(A3) $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi)$,

(A4) $\varphi \wedge \psi \to \varphi, \qquad \varphi \wedge \psi \to \psi$,

(A5) $\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$,

(A6) $\varphi \to \varphi \vee \psi, \qquad \psi \to \varphi \vee \psi$,

(A7) $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi))$

K dokazování můžete používat větu o dedukci a tedy také $\varphi \to \varphi$. Dále však používejte pouze to, co si sami dokážete, poté samozřejmě i kdykoliv později. Naopak rozhodně nepoužívejte větu o úplnosti!

IX.1 V HK dokažte následující formule:

(a) $\neg\varphi \vee \neg\psi \to \neg(\varphi \wedge \psi)$,

(b) $\neg(\varphi \wedge \psi) \to \neg\varphi \vee \neg\psi$,

(c) $\neg\varphi \wedge \neg\psi \to \neg(\varphi \vee \psi)$,

(d) $\neg(\varphi \vee \psi) \to \neg\varphi \wedge \neg\psi$.

IX.2 Nechť Σ je sporná množina formulí, pak existuje její konečná podmnožina Δ, která je také sporná. Dokažte.

Návod: uvědomte si, že důkaz je konečná posloupnost formulí.

IX.3 Dokažte, že je-li množina formulí splnitelná, pak je také bezesporná.

Návod: dokazujte sporem a použijte větu o korektnosti.

IX.4 Dokažte pro libovolné pravdivostní ohodnocení v, že množina formulí $\Sigma = \{\varphi : v(\varphi) = 1\}$ je maximálně bezesporná množina.

Návod: k důkazu bezespornosti množiny použijte tvrzení předchozího cvičení, maximálnost dokažte sporem.

IX.5 Nechť Σ je maximálně bezesporná množina formulí a φ je formule. Jestliže $\Sigma \vdash \varphi$, pak $\varphi \in \Sigma$.

IX.6 Nechť Σ je maximálně bezesporná množina formulí a φ je formule, pak $\neg\varphi \in \Sigma$, právě tehdy když $\varphi \notin \Sigma$.

IX.7 Nechť Σ je maximálně bezesporná množina formulí a φ a ψ jsou formule, pak $\varphi \to \psi \in \Sigma$, právě tehdy když $\varphi \notin \Sigma$ nebo $\psi \in \Sigma$.